香港中文大學
數學系
Python 求微分方程數值解練習

數值方法透過從初始條件開始以較小的疊代步長計算離散的近似解來解決微分方程，其準確度與效率取決於所用的演算法和時間步長；常見的方法包括歐拉法（Euler's）和龍格－庫塔法（Runge-Kutta）。

MATLAB 提供了多種ODE 求解器：ode45（通用型龍格－庫塔法）以及四個剛性求解器（ode15s, ode23s, ode23t, ode2）。剛性常微分方程（Stiff ODEs）涉及具有廣泛變化的時間尺度的解（快/慢組件），這會導致標準方法變得不穩定，除非使用極小的時間步長；剛性取決於數值方法，而不僅僅是方程本身。要使用MATLAB 的ODE 求解器，使用者需定義一個ODE 函數、初始條件和時間範圍；求解器會返回時間/解的向量以供繪圖。

MATLAB 的dsolve 是一個符號（解析）求解器，對於複雜、非線性或不具備閉合形式解的ODE 它可能會失敗，而這有別於數值求解器。下表提供了MATLAB ODE 求解器與等效Python 方法的直接對應關係，Python 使用`scipy.integrate.solve_ivp`（數值）和`sympy.dsolve`（符號）。

MATLAB 求解器	**Python `solve_ivp` 方法**	**目的**
`ode45`	`RK45`	通用（預設）
`ode15s`	`Radau`	剛性系統
`ode23s`	`BDF`	剛性系統
`ode23t`	`LSODA`	剛性/非剛性切換
`ode23tb`	`Radau`	剛性系統
`dsolve`	`sympy.dsolve`	解析（符號）解

例子1 利用`Python` 繪製以下初值問題的解：

$$y' = 4x, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 2.5]$$

Table 1: 初值問題摘要（例子1）

項目	詳細資訊
ODE	$y' = 4x$
初始條件	$y(0) = 1$
區間	$x \in [0,\ 2.5]$
解析解	$y = 2x^2 + 1$

例子2 利用`Python` 繪製以下初值問題的解：

$$y' + 3y = xe^{2x}, \quad y(2) = -4, \quad x \in [2, 2.7].$$

精確解析解（出自`SymPy`）

$$y(x) = \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{25}\right) e^{2x} + \left(-4e^6 - \frac{9}{25}e^4\right) e^{-3x}.$$

簡化形式

$$y(x) = \frac{5x-1}{25}\, e^{2x} + Ce^{-3x},$$

其中

$$C = -4e^6 - \frac{9}{25}e^4.$$

Table 2: 初值問題摘要（例子2）

項目	資訊
ODE	$y' + 3y = xe^{2x}$
初始條件	$y(2) = -4$
區間	$x \in [2,\, 2.7]$
精確解	由`SymPy` 給出
簡化形式	$y(x) = \frac{5x-1}{25}e^{2x} + Ce^{-3x}$
常數C	$-4e^6 - \frac{9}{25}e^4$

例子3 利用`Python` 求解並繪製以下初值問題的解：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^2 - x \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.5x^2 - y \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 3].$$

Table 3: 非線性系統初值問題摘要（例子3）

項目	詳細資訊
ODE 系統	$\dot{x} = y^2 - x,\ \dot{y} = 0.5x^2 - y$
初始條件	$x(0) = 1,\ y(0) = 0$
時間區間	$t \in [0,\, 3]$
問題類型	非線性自治系統
求解方法	`Python` 數值求解器

例子4 具有固定時間步長的一階ODE 系統

利用`Python` 求解並繪製以下初值問題的解：

$$\begin{cases} \dfrac{dy_2}{dt} + 3y_2 = 6y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dt} + 5y_1 = \sin(2t) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 0.5].$$

重新排列成標準形式：

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -5y_1 + \sin(2t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 6y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

Table 4: 例子4 ODE 系統摘要

項目	詳細資訊
原始系統	$y_2' + 3y_2 = 6y_1,\ y_1' + 5y_1 = \sin(2t)$
標準形式	$y_1' = -5y_1 + \sin(2t),\ y_2' = 6y_1 - 3y_2$
初始條件	$y_1(0) = 5,\ y_2(0) = -2$
時間區間	$t \in [0,\ 0.5]$
問題類型	線性ODE 系統

例子5 具有固定時間步長的三變量ODE 系統

利用`Python` 求解並繪製以下初值問題的解：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.45z - e^{-t} \\ \dfrac{dz}{dt} = -0.25xy + t^2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 4].$$

Table 5: 三變量ODE 系統摘要（例子5）

組件	**詳細資訊**
ODE 1	$\dfrac{dx}{dt} = y - z$
ODE 2	$\dfrac{dy}{dt} = 0.45z - e^{-t}$
ODE 3	$\dfrac{dz}{dt} = -0.25xy + t^2$
初始條件	$x(0) = -2,\ y(0) = -5,\ z(0) = 7$
時間區間	$t \in [0,\ 4]$
問題類型	3 變量非線性ODE 系統

例子6 剛性三變量ODE 系統（羅伯遜反應動力學）

利用`Python` 求解並繪製以下初值問題的解：

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -k_1y_1 + k_3y_2y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = k_1y_1 - k_2y_2^2 - k_3y_2y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dt} = k_2y_2^2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

給定速率常數為$k_1 = 0.04$，$k_2 = 10^4$，$k_3 = 3 \times 10^7$，區間為$t \in [0, 4 \times 10^6]$。

Table 6: 羅伯遜剛性ODE 系統摘要（例子6）

項目	詳細資訊
系統類型	剛性三變量ODE（羅伯遜動力學）
ODEs	如上所示之y_1', y_2', y_3'
初始條件	$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 0$
速率常數	$k_1 = 0.04,\ k_2 = 10^4,\ k_3 = 3 \times 10^7$
時間區間	$t \in [0,\, 4 \times 10^6]$